Tema 2. La derivada

Introducción

Ya sean básicas o compuestas, las derivadas forman parte de la vida de muchos profesionales, sobre todo en el ámbito de la ingeniería. Obtener derivadas por medio de fórmulas se ha vuelto cada vez más sencillo, así que el proceso es más corto.

Existen diferentes tipos de funciones, por ejemplo, algebraicas, logarítmicas, trigonométricas, exponenciales, entre otras. Cada una de ellas cuenta con su propia fórmula.

Explicación

Derivadas de funciones trigonométricas, de funciones exponenciales y logarítmicas y de funciones polinomiales

La derivada tiene diversas aplicaciones, ya que expresa una cantidad exacta en el cálculo de generalidades. Por este motivo, se puede describir desde varias perspectivas; por ejemplo, en la física, la primera derivada es la velocidad promedio, a la vez que supone la tangente de una función.

El siguiente formulario (tabla 1) se propone ayudarte a comprender el proceso de derivación. Observa con atención las fórmulas, analízalas y compáralas con las situaciones que se presentan en los ejemplos del tema.

	Fórmula de derivadas	Reglas de derivación
1	$\frac{d}{dx}(c)=0$	Regla de la suma o resta de 2 funciones diferentes. $y=[f(x)\pm g(x)]\rightarrow y'=f'(x)\pm g'(x)$
2	$\frac{d}{dx}(cx)=c$	Regla de la multiplicación de 2 funciones diferentes. $y=[f(x)g(x)]\rightarrow y'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$
3	$\frac{d}{dx}(cx^n)=ncx^{n-1}$	Regla de la división de 2 funciones diferentes. $y=\frac{f(x)}{g(x)}\rightarrow y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$
4	$\frac{d}{dx}sen(v)=v'cosv$	Regla de la cadena. $y=[f(x)]^n\rightarrow y'=n[f(x)]^{n-1}[f'(x)]$
5	$\frac{d}{dx}cos(v)=-v'senv$	
6	$\frac{d}{dx}tan(v)=v'sec^2 v$	
7	$\frac{d}{dx}ln(v)=\frac{v'}{v}$	
8	$\frac{d}{dx}e^v=v'e^v$	

Tabla 1. Fórmulas elementales de derivadas y reglas de derivación.

La tabla 1 no contiene todas las fórmulas y reglas de derivación, solo muestra las fundamentales. Además, se colocó un número en cada una para explicarla mediante ejemplos.

A continuación, se repasarán las indicaciones a seguir para una correcta derivación por fórmula, así como la implementación de las reglas de derivación.

Regla de la suma y resta

De acuerdo con Stewart (2021), si $f(x)$ y $g(x)$ representan dos o más funciones de distintas derivables separadas solo por una suma o resta, entonces se podrán derivar aparte.

$$y=[f(x)\pm g(x)]\rightarrow y'=f'(x)\pm g'(x)$$

En el siguiente ejemplo, hay tres funciones distintas de derivables separadas por signos.

Deriva la función:

Función	Tres funciones distintas derivables separadas por signos
$y=x^4+3x^2-7$	$y=x^4+3x^2-7$
$y'=4x^{4-1}$ $+3{*}2x^{2-1}$ -7	Fórmula 3. $\frac{d}{dx}(cx^n)=ncx^{n-1}$ El número de la potencia n baja a multiplicar al coeficient c,a la vez que a n se le resta -1.
$y'=4x^3+3{*}2x^1-0$	Mientras que en el término -7 se utiliza la fórmula 1. $\frac{d}{dx}(c)=0$ Entonces, la derivada es cero. Esto ocasiona que en la respuesta no se coloque dicha cifra.
$y'=4x^3+3{*}2x^1=$ $y'=4x^3+6x$	Resultado.

Tabla 2. Tipos de determinantes.

Regla del producto

Para Stewart (2021), si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones que se multiplican y, además, derivables, entonces:

$$y=[f(x)g(x)]\rightarrow y'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

A continuación, se realiza una multiplicación de dos funciones: una algebraica $\frac{d}{dx}(cx^n)=ncx^{n-1}$ y la otra logarítmica $\frac{d}{dx}\ ln(v)=\frac{v'}{v}$.

Deriva la función:

$$y=[x^4ln(x)]$$

En la regla del producto, se necesita la multiplicación de las funciones y de las derivadas; por tanto, antes de responder, se recomienda calcular las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$, tal y como se ordenan en la tabla 2.

Función	Derivada
$f(x)=x^4$	$f'(x)=4x^3$
$g(x)=In(x)$	$g'(x)=\frac{1}{x}$

Tabla 3. Funciones y su derivada.

Observa los pasos a seguir para solucionar la derivada de la multiplicación de dos funciones.

Regla del producto	Función $y'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$
Ordena la multiplicación de la función por la derivada de la segunda función en cada caso.	$y'=(4x^3)(ln(x))+(\frac{1}{x})(x^4)$
Resuelve la multiplicación y elimina si es necesario.	$y'=4x^3\ ln(x)+\frac{x^4}{x}$
Resultado de la derivada.	$y'=4x^3\ ln(x)+x^3$
El resultado se puede factorizar por términos semejantes. Como x^3 aparece en ambos términos, entonces se puede extraer de la función en forma de multiplicación.	$y'=x^3(4\ ln(x)+1)$

Tabla 4. Funciones y su derivada.

Regla del cociente

Para Stewart (2021), si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones que se dividen y, además, derivables, entonces:

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}\rightarrow y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$$

A continuación, se realiza una multiplicación de dos funciones: una algebraica $\frac{d}{dx}(cx^n)=ncx^{n-1}$ y la otra exponencial $\frac{d}{dx}e^v=v'^{e^v}$.

Deriva la función:

$$y=\frac{3x^2}{e^x}$$

En la regla del cociente se necesita dividir funciones y derivadas; por tanto, antes de responder se recomienda tener las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$, tal y como se muestra en la tabla 3.

Función	Derivada
$f(x)=3x^2$	$f'(x)=6x$
$g(x)=e^x$	$g'(x)=e^x$

Tabla 5. Función y su derivada.

$$y'=\frac{(6x)(e^x)-e^x(3x^2)}{[e^x]^2}$$

1. Se multiplican las funciones.

$$y'=\frac{6xe^x-3x^2e^x}{[e^x]^2}$$

2. Se extrae el término semejante, en este caso e^x.

$$y'=\frac{3xe^x(2-x)}{(e^x)(e^x)}$$

3. Se determina si existen elementos que se puedan eliminar para simplificar la ecuación.

$$y'=\frac{3x\cancel{e^x}(2-x)}{(e^x)(\cancel{e^x})}$$

4. Se expresa la ecuación a su mínima expresión.

$$y'=\frac{3x(2-x)}{(e^x)}$$

Regla de la cadena

De acuerdo con Stewart (2021), si $f(x)$ es una función derivable que se eleva a un exponente n, entonces debes utilizar la regla de la cadena, que expresa lo siguiente:

$$y=[f(x)]^n\rightarrow y'=n[f(x)]^{n-1}[f'(x)]$$

Donde n es el exponente al que se eleva la función completa.

Función x^4+3x^2	Función derivable $y=[x^4+3x^2]^7$
El exponente ^{7} multiplica a la función y, a la vez, se resta uno. $7[x^4+3x^2]^{7-1}$	$y'=7[x^4+3x^2]^{7-1}$
Después se multiplica por la derivada de la función: x^4+3x^2 Entonces, la derivada es la siguiente: $4x^3+6x$	$y'=7[x^4+3x^2]^{7-1}[4x^3+6x]$

Tabla 6. Regla de la cadena.

En caso de que se puedan multiplicar los términos sin afectar el resultado, se aconseja hacerlo.

El resultado es el siguiente:

$$y'=[x^4+3x^2]^6[28x^3+42x]$$

Es importante comprender primero los métodos de derivación y sus propiedades para entender cómo utilizarlos; sin embargo, también hay funciones que se derivan directamente, por ejemplo:

$$y=tan(x^2)$$

Primero, selecciona la fórmula de la derivada necesaria para solucionar la ecuación:

$$\frac{d}{dx}tan(v)=v'sec^2v$$

Al tener x^2 como ángulo, la fórmula de derivación exige multiplicar por la derivada del ángulo; en este caso, la de x^2 es $2x$.

Como puedes observar, el resultado se obtiene de manera directa y sencilla, así que se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx}tan(\boldsymbol{x^2})=2x\ sec^2(\boldsymbol{x^2})$$

Cierre

Utilizar fórmulas de derivación es más sencillo y rápido que derivar por límite. Al realizar el procedimiento, debes analizar la estructura general de la función y preguntarte: ¿qué regla debo elegir?, ¿cuál fórmula me ayudará? Estas interrogantes te permitirán hacer una correcta elección y, por tanto, llegar a un resultado óptimo.

Ya sean logarítmicas, algebraicas, trigonométricas o exponenciales, las derivadas tienen soluciones particulares. Si estas se analizan a partir de las fórmulas, permiten identificar la más adecuada para resolver los problemas con derivadas.

Checkpoint

Asegúrate de:

- Comprender las relaciones entre funciones y procedimientos de derivación para enlazar las funciones con sus derivadas.
- Entender las reglas de derivación para facilitar la obtención de las derivadas y sus resultados.
- Comprender que existen igualdades e identidades trigonométricas que favorecen el cambio de función para una derivación más sencilla.

Bibliografía

- Stewart, J. (2021). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas* (9ª ed.). México: Cengage.